第 34 講　微分法(3)・積分法(1)

例題 34 ー 1

(1)　次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ.

(ア)　$2x^3-6x+1=0$　　(イ)　$x^3+3x^2-4=0$

(2)　方程式 $-x^3+3x^2+9x=a$ が異なる 3 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題34－1

(1)　次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ.

(ア)　$2x^3+3x^2+2=0$　　　　(イ)　$x^3+4x^2+6x+2=0$

(2)　方程式 $2x^3+9x^2-3=a$ が異なる3つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 34 ー 2

次の不等式が成り立つことを証明せよ.

(1)　$x>0$ のとき　$3x^3+1>x$

(2)　$x\geqq 0$ のとき　$x^3+4x\geqq 3x^2$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題34－2

次の不等式が成り立つことを証明せよ.

(1)　$x \geqq 0$ のとき　$2x^3+1 \geqq 3x^2$

(2)　$x > 1$ のとき　$x^3-6x^2+12x-7>0$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 34 ー 3

(1)　次の不定積分を求めよ．

(ア)　$\int (x^2+x+2)dx$　　(イ)　$\int (x+2)^2 dx$

(2)　次の定積分を求めよ．

(ア)　$\int_{-3}^{1} (2x^2-3x+4)dx$　　(イ)　$\int_{2}^{4} (x-1)(x-3)dx$

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 34 ー 3

(1)　不定積分 $\int(3x^2-x+2)dx$ を求めよ．

(2)　次の定積分を求めよ．

(ア)　$\int_1^4 (x-1)^2 dx$　　　(イ)　$\int_{-1}^1 (4x^3-x^2+2x-1)dx$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 34 ー 4

(1)　等式 $f(x)=x+\int_0^3 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

(2)　次の問いに答えよ.

(ア)　$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_2^x (2t+1)dt$ を計算せよ.

(イ)　等式 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt=x^2-5x+6$ を満たす関数 $f(x)$ および定数 a の値を求めよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 34 ー 4

(1)　等式 $f(x)=3x^2-x\int_0^2 f(t)dt+2$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

(2)　等式 $\int_a^x f(t)dt=2x^2-9x+4$ を満たす関数 $f(x)$ および定数 a の値を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 34 講　微分法(3)・積分法(1)

(1)　3 次方程式 $2x^3-3x^2-12x-a=0$ が相異なる 3 つの実数解をもつような a の範囲は $-$ アイ $< a <$ ウ である．

(2)　定積分 $\int_{-2}^{2}(2x^3+x^2+3x)dx$ の値は $\dfrac{\text{エオ}}{\text{カ}}$ である．

(3)　等式 $f(x)=x^2+2\int_0^1 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ は　$f(x)=x^2-\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}$ である．

(4)　等式 $\int_a^x f(t)dt=x^3-3x^2+x+a$ を満たす関数 $f(x)$ は

$f(x)=$ ケ x^2- コ $x+$ サ である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 34 講　微分法(3)・積分法(1)

例題 34 － 1

(1)　次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ.

(ア)　$2x^3-6x+1=0$　　(イ)　$x^3+3x^2-4=0$

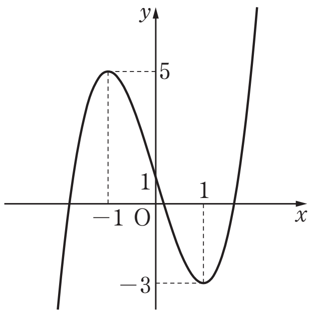
(2)　方程式 $-x^3+3x^2+9x=a$ が異なる 3 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ.

(1)　(ア)　$f(x)=2x^3-6x+1$ とおくと

$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$f(x)$ の増減表は以下. グラフは右図.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	-3	↗



よって　$y=f(x)$ と x 軸の共有点は 3 個より,

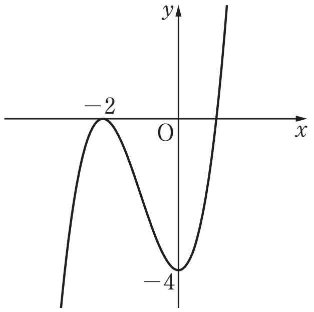
方程式 $2x^3-6x+1=0$ の異なる実数解の個数は **3 個**

(イ)　$f(x)=x^3+3x^2-4$ とおくと

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f(x)$ の増減表は以下. グラフは右図.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗



よって　$y=f(x)$ と x 軸の共有点は 2 個より,

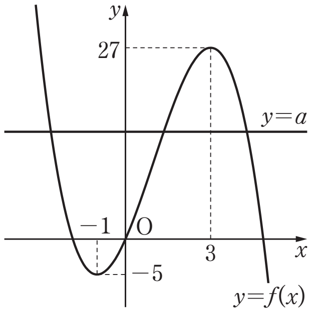
方程式 $x^3+3x^2-4=0$ の異なる実数解の個数は **2 個**

(2)　$f(x)=-x^3+3x^2+9x$ とおくと, 方程式 $-x^3+3x^2+9x=a$ の異なる実数解の個数は曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a$ の共有点の個数である.

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x-3)(x+1)$

$f(x)$ の増減表は以下. グラフは右図.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-5	↗	27	↘



よって異なる実数解の個数が 3 個となるのは

$\boldsymbol{-5<a<27}$　のとき.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 34 ー 1

(1)　次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ．

(ア)　$2x^3+3x^2+2=0$　　(イ)　$x^3+4x^2+6x+2=0$

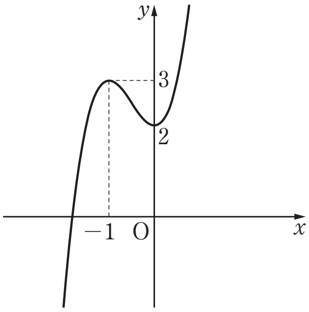
(2)　方程式 $2x^3+9x^2-3=a$ が異なる 3 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

(1)　(ア)　$f(x)=2x^3+3x^2+2$ とおくと

$$f'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$$

$f(x)$ の増減表は以下．グラフは右図．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	2	↗



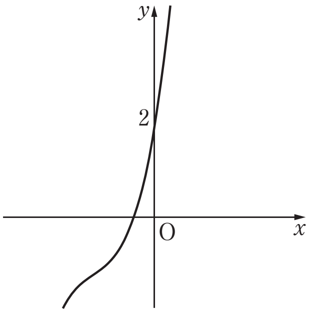
よって　$y=f(x)$ と x 軸の共有点は 1 個より，

方程式 $2x^3+3x^2+2=0$ の異なる実数解の個数は **1 個**

(イ)　$f(x)=x^3+4x^2+6x+2$ とおくと

$$f'(x)=3x^2+8x+6=3\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$$

よって常に $f'(x)>0$ より，$f(x)$ は単調増加．グラフは右図．



したがって　$y=f(x)$ と x 軸の共有点は 1 個より，

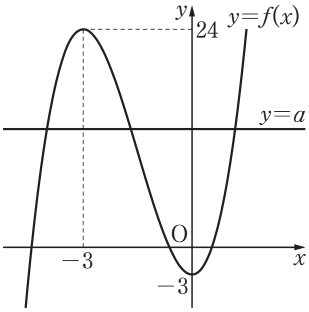
方程式 $x^3+4x^2+6x+2=0$ の異なる実数解の個数は **1 個**

(2)　$f(x)=2x^3+9x^2-3$ とおくと，方程式 $2x^3+9x^2-3=a$ の異なる実数解の個数は曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a$ の共有点の個数である．

$$f'(x)=6x^2+18x=6x(x+3)$$

$f(x)$ の増減表は以下．グラフは右図．

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	24	↘	-3	↗



よって異なる実数解の個数が 3 個となるのは

$-3<a<24$　のとき．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 34 ― 2

次の不等式が成り立つことを証明せよ.

(1)　$x>0$ のとき　$3x^3+1>x$

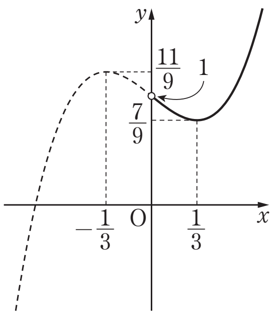
(2)　$x\geqq 0$ のとき　$x^3+4x\geqq 3x^2$

(1)　$f(x)=(3x^3+1)-x=3x^3-x+1$ とおくと

$$f'(x)=9x^2-1=(3x+1)(3x-1)$$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は以下．グラフは右図.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	(1)	↘	$\frac{7}{9}$	↗



よって　$x>0$ のとき　$f(x)>0$

したがって　$x>0$ のとき　$3x^3+1>x$ が成り立つ.

(2)　$f(x)=(x^3+4x)-3x^2=x^3-3x^2+4x$ とおくと

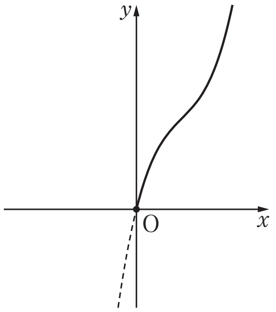
$$f'(x)=3x^2-6x+4=3(x-1)^2+1>0$$

よって常に $f'(x)>0$ より，$f(x)$ は単調増加.

また，$f(0)=0$

よって　$x\geqq 0$ のとき　$f(x)\geqq 0$

したがって　$x\geqq 0$ のとき　$x^3+4x\geqq 3x^2$ が成り立つ.



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 34 － 2

次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1)　$x \geqq 0$ のとき　$2x^3+1 \geqq 3x^2$

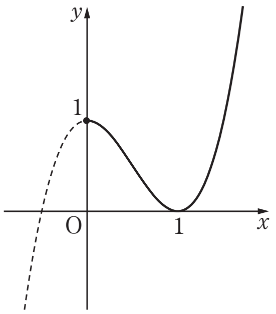
(2)　$x>1$ のとき　$x^3-6x^2+12x-7>0$

(1)　$f(x)=(2x^3+1)-3x^2=2x^3-3x^2+1$ とおくと

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は以下．グラフは右図．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↘	0	↗



よって　$x \geqq 0$ のとき　$f(x) \geqq 0$

したがって　$x \geqq 0$ のとき　$2x^3+1 \geqq 3x^2$ が成り立つ．

(2)　$f(x)=x^3-6x^2+12x-7$ とおくと

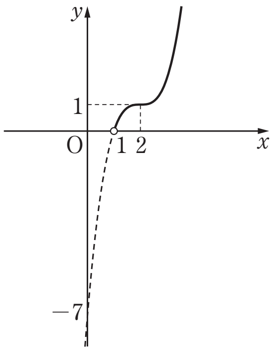
$f'(x)=3x^2-12x+12=3(x-2)^2 \geqq 0$

よって常に $f'(x) \geqq 0$（$f'(x)=0$ となるのは $x=2$ のみ）より，$f(x)$ は単調増加．

また，$f(1)=0$

よって　$x>1$ のとき　$f(x)>0$

したがって　$x>1$ のとき　$x^3-6x^2+12x-7>0$ が成り立つ．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 34 ー 3

(1) 次の不定積分を求めよ.

(ア) $\int (x^2+x+2)dx$　　(イ) $\int (x+2)^2 dx$

(2) 次の定積分を求めよ.

(ア) $\int_{-3}^{1} (2x^2-3x+4)dx$　　(イ) $\int_{2}^{4} (x-1)(x-3)dx$

(1) C を積分定数とする.

(ア) $\int (x^2+x+2)dx = \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+C}$

(イ) $\int (x+2)^2 dx = \int (x^2+4x+4)dx = \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x+C}$

(2) (ア) $\int_{-3}^{1} (2x^2-3x+4)dx = \left[\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-3}^{1}$

$$= \left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+4\right)-\left(-\frac{54}{3}-\frac{27}{2}-12\right)$$

$$= \frac{56}{3}+\frac{24}{2}+16 = \boldsymbol{\frac{140}{3}}$$

(イ) $\int_{2}^{4} (x-1)(x-3)dx = \int_{2}^{4} (x^2-4x+3)dx = \left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_{2}^{4}$

$$= \left(\frac{64}{3}-32+12\right)-\left(\frac{8}{3}-8+6\right)$$

$$= \frac{56}{3}-24+6 = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

類題 34 ー 3

(1) 不定積分 $\int (3x^2-x+2)dx$ を求めよ.

(2) 次の定積分を求めよ.

(ア) $\int_{1}^{4} (x-1)^2 dx$　　(イ) $\int_{-1}^{1} (4x^3-x^2+2x-1)dx$

(1) $\int (3x^2-x+2)dx = \boldsymbol{x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+C}$　(C：積分定数)

(2) (ア) $\int_{1}^{4} (x-1)^2 dx = \int_{1}^{4} (x^2-2x+1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{1}^{4}$

$$= \left(\frac{64}{3}-16+4\right)-\left(\frac{1}{3}-1+1\right) = \frac{63}{3}-12 = \boldsymbol{9}$$

(イ) $\int_{-1}^{1} (4x^3-x^2+2x-1)dx = \left[x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2-x\right]_{-1}^{1}$

$$= \left(1-\frac{1}{3}+1-1\right)-\left(1+\frac{1}{3}+1+1\right) = -\frac{2}{3}-2 = \boldsymbol{-\frac{8}{3}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 34 ー 4

(1)　等式 $f(x)=x+\int_0^3 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

(2)　次の問いに答えよ．

(ア)　$\dfrac{d}{dx}\int_2^x (2t+1)dt$ を計算せよ．

(イ)　等式 $\int_a^x f(t)dt=x^2-5x+6$ を満たす関数 $f(x)$ および定数 a の値を求めよ．

(1)　$\int_0^3 f(t)dt=a$ とおくと　　$f(x)=x+a$

このとき　$a=\int_0^3 f(t)dt=\int_0^3 (t+a)dt$

$$=\left[\frac{t^2}{2}+at\right]_0^3=\frac{9}{2}+3a$$

より

$a=\dfrac{9}{2}+3a$　　　$a=-\dfrac{9}{4}$　　　　よって　$\boldsymbol{f(x)=x-\dfrac{9}{4}}$

(2)　(ア)　$\dfrac{d}{dx}\int_2^x (2t+1)dt=\dfrac{d}{dx}[t^2+t]_2^x=\dfrac{d}{dx}(x^2+x-6)=\boldsymbol{2x+1}$

(イ)　$\int_a^x f(t)dt=x^2-5x+6$　……①　の両辺を x で微分すると

$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=2x-5$　　　よって　$\boldsymbol{f(x)=2x-5}$

また，①で $x=a$ のとき　$\int_a^a f(t)dt=a^2-5a+6$

つまり　$a^2-5a+6=0$　　$(a-3)(a-2)=0$　　よって　$\boldsymbol{a=2,\ 3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 34 － 4

(1)　等式 $f(x)=3x^2-x\int_0^2 f(t)dt+2$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

(2)　等式 $\int_a^x f(t)dt=2x^2-9x+4$ を満たす関数 $f(x)$ および定数 a の値を求めよ.

(1)　$\int_0^2 f(t)dt=a$ とおくと　$f(x)=3x^2-ax+2$

このとき　$a=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 (3t^2-at+2)dt$

$$=\left[t^3-\frac{a}{2}t^2+2t\right]_0^2=12-2a$$

より

$a=12-2a$　　$a=4$　　　よって　$\boldsymbol{f(x)=3x^2-4x+2}$

(2)　$\int_a^x f(t)dt=2x^2-9x+4$　……①　の両辺を x で微分すると

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=4x-9$　　よって　$\boldsymbol{f(x)=4x-9}$

また，①で $x=a$ のとき　$\int_a^a f(t)dt=2a^2-9a+4$

つまり　$2a^2-9a+4=0$　　$(2a-1)(a-4)=0$　　よって　$\boldsymbol{a=\frac{1}{2},\ 4}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 34 講　微分法(3)・積分法(1)

(1)　3 次方程式 $2x^3-3x^2-12x-a=0$ が相異なる 3 つの実数解をもつような a の範囲は
$-$ **アイ** $<a<$ **ウ** である．

(2)　定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{2}(2x^3+x^2+3x)dx$　の値は $\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}$　である．

(3)　等式 $f(x)=x^2+2\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ は　$f(x)=x^2-\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である．

(4)　等式 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt=x^3-3x^2+x+a$ を満たす関数 $f(x)$ は
$f(x)=$ **ケ** x^2- **コ** $x+$ **サ**　である．

解答例

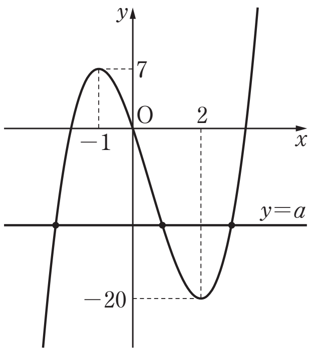
(1)　$2x^3-3x^2-12x-a=0$　より　$2x^3-3x^2-12x=a$

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$ とおくと，方程式 $2x^3-3x^2-12x=a$ の異なる実数解の個数は曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a$ の共有点の個数である．

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x-2)(x+1)$

$f(x)$ の増減表は以下．グラフは右図．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	-20	↗



よって題意を満たす a の範囲は　　$\mathbf{-20<a<7}$

(2)　$\displaystyle\int_{-2}^{2}(2x^3+x^2+3x)dx=\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^{2}=\left(8+\frac{8}{3}+6\right)-\left(8-\frac{8}{3}+6\right)=\mathbf{\frac{16}{3}}$

(3)　$\displaystyle\int_0^1 f(t)dt=a$ とおくと　$f(x)=x^2+2a$

このとき　$a=\displaystyle\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(t^2+2a)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+2at\right]_0^1=\frac{1}{3}+2a$　より

$a=\dfrac{1}{3}+2a$　　$a=-\dfrac{1}{3}$　　　よって　$f(x)=x^2-\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

(4)　$\displaystyle\int_a^x f(t)dt=x^3-3x^2+x+a$ の両辺を x で微分して　$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=3x^2-6x+1$

よって　$f(x)=\mathbf{3x^2-6x+1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。